$$D(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + o(x-0)$$

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

<u>Oss</u>: $o(1)$ vuol dire che è una quantità che tende a $\emptyset$.

Prop: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$
f debolmente crescente in A.
Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A$ allora

$$f'(x_0) \geq 0.$$

nel caso f deb. decrescente

$$\Rightarrow f'(x_0) \leq 0.$$

dim:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se f è deb. crescente

numeratore e denominatore

sono concordi in segno

$$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$\square$

Oss: Se f è strettamente crescente posso dedurre solo che $f'(x_0) \geq 0$ e non che $f'(x_0) > 0$.

Es: $f(x) = x^3$.

è strettamente crescente

ma $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

non vale $f'(x) > 0$

perché $f'(0) = 0$.

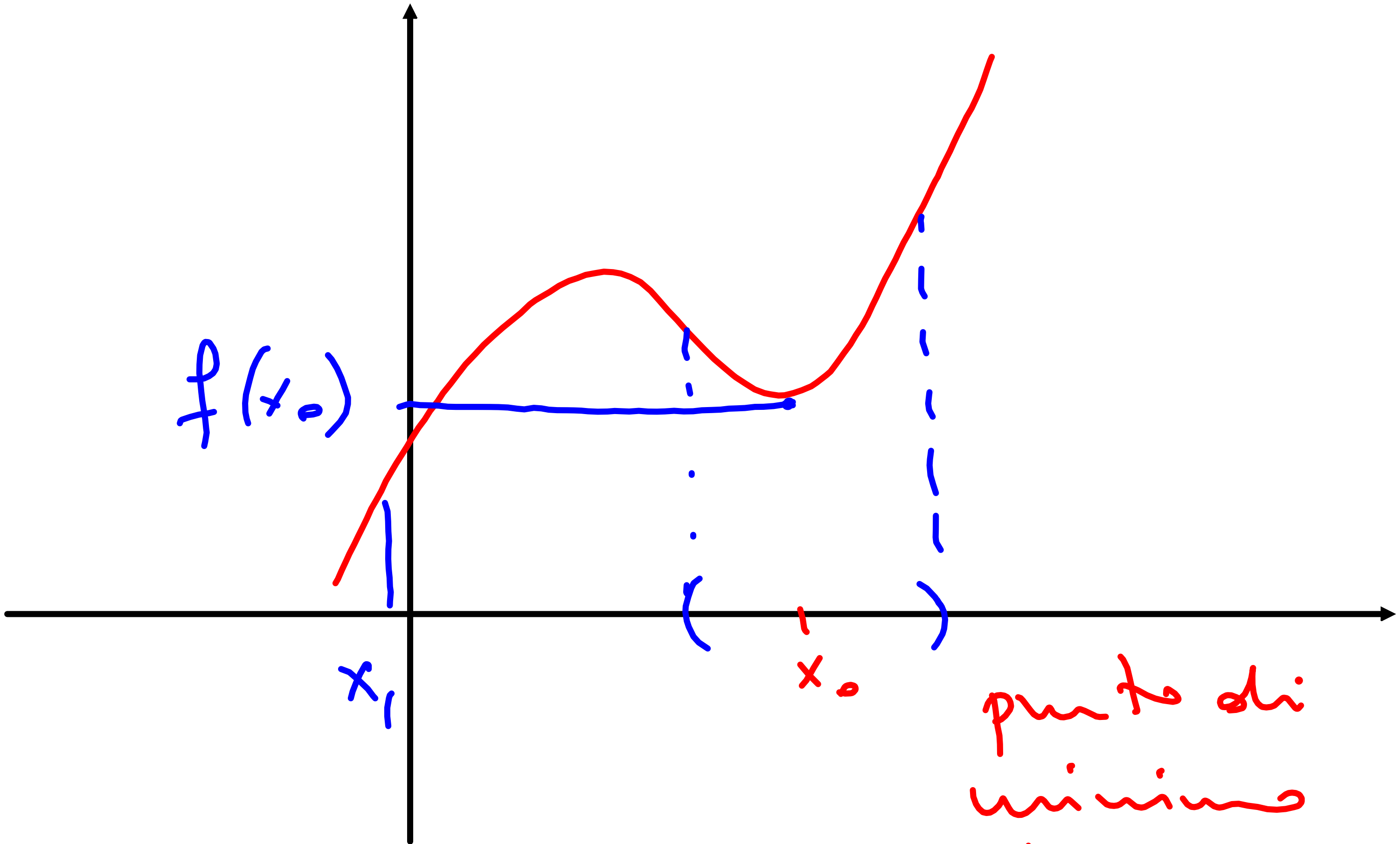
<u>Def</u> : $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o relativo) se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\, x \in A \cap U$

si dice di minimo locale stretto se

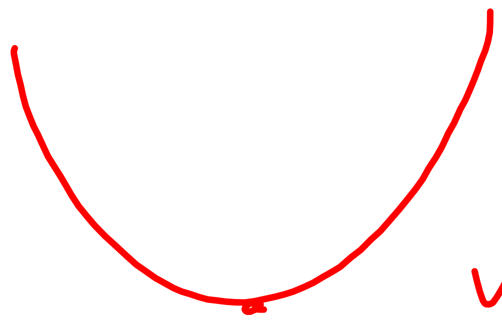
$$f(x) > f(x_0)$$

$$\forall\, x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$$

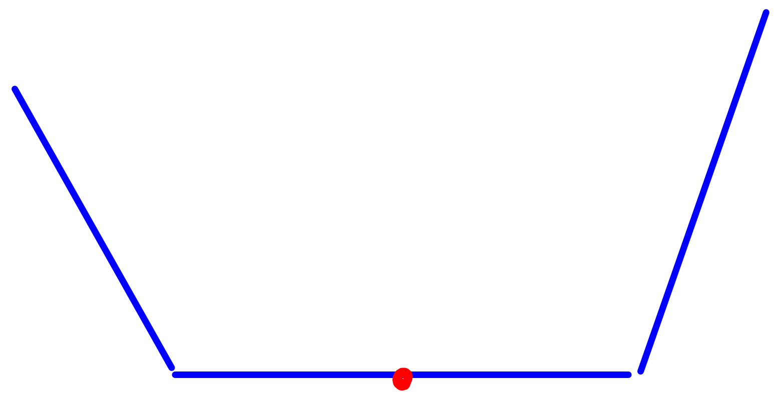


punto di minimo locale

non è un minimo globale perché $f(x_1) < f(x_0)$



minimo stretto



minimo non stretto.

Teorema di Fermat

$f : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ è un punto di massimo o di minimo locale e se f è derivabile in x_0 allora

$$f'(x_0) = 0 .$$

<u>dim</u>: Se f è derivabile in x_0

allora $\exists$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad (*)$$

supponiamo che x_0 sia di minimo locale. $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ in un intorno di x_0

allora $(*) \geq 0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$ in un

intorno destro di x_0

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 .$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0 .$$

nel caso del limite sinistro

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

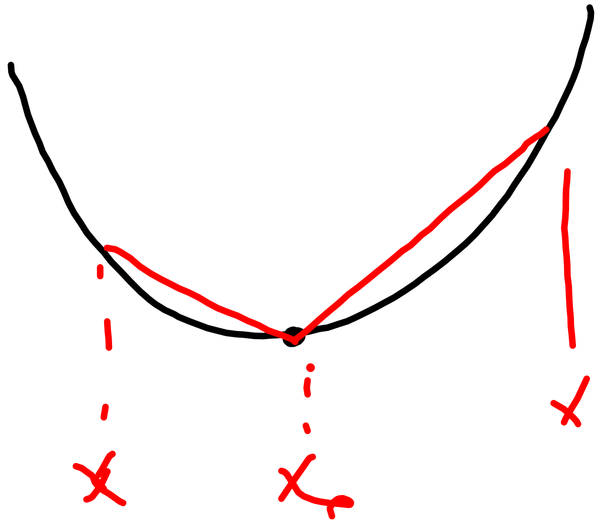
≥ 0 perché è un minimo locale

≤ 0 perché $x \to x_0^-$

$$\Rightarrow f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 .$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0 .$$

$\square$



x
x
x

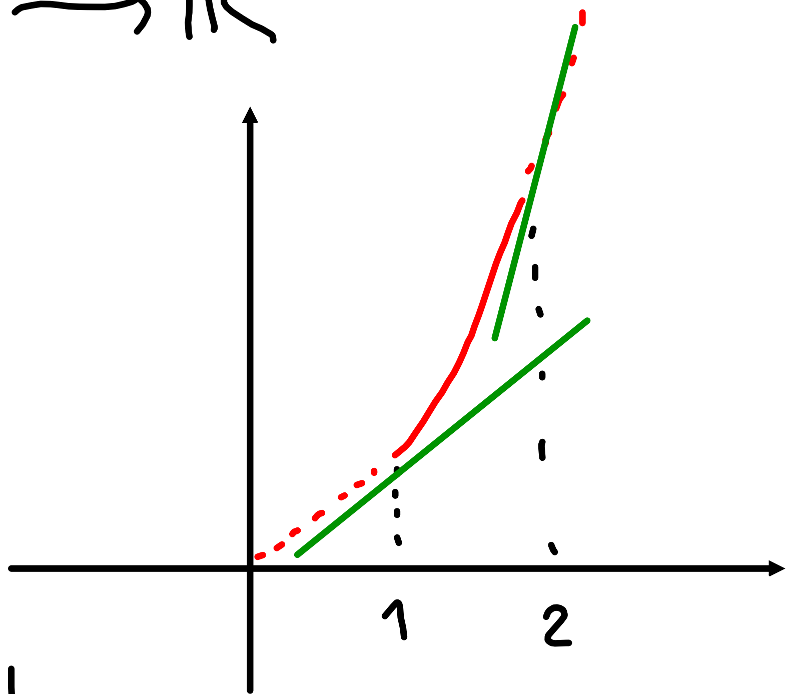
Le ipotesi sono tutte necessarie.

Es: $f : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$

$x_0 = 1$ è di minimo locale

$x_1 = 2$ è di massimo locale



$$f'(x) = 2x$$

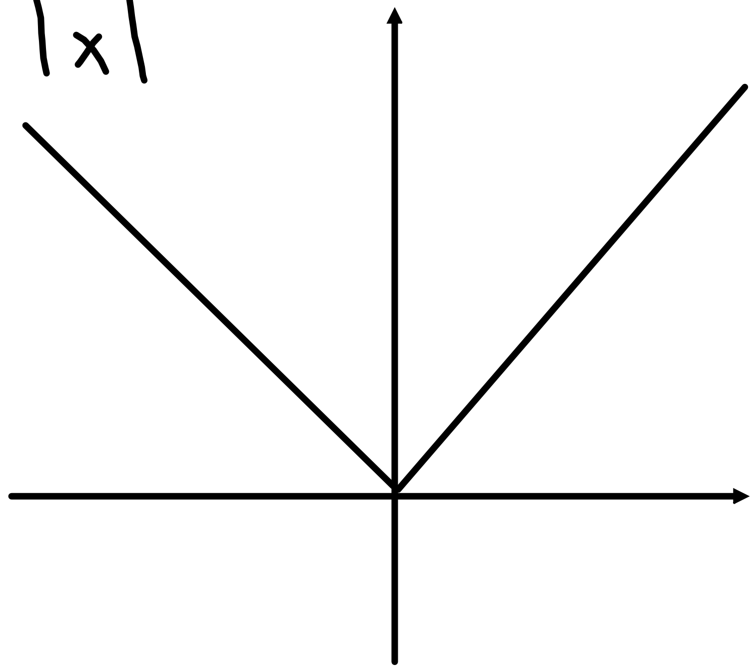
$$f'(x_0) = f'(1) = 2 \neq 0$$

$$f'(x_1) = f'(2) = 4 \neq 0$$

ma x_0 e x_1 non sono punti interni.

L'ipotesi di derivabilità è necessaria.

Es: $f(x) = |x|$



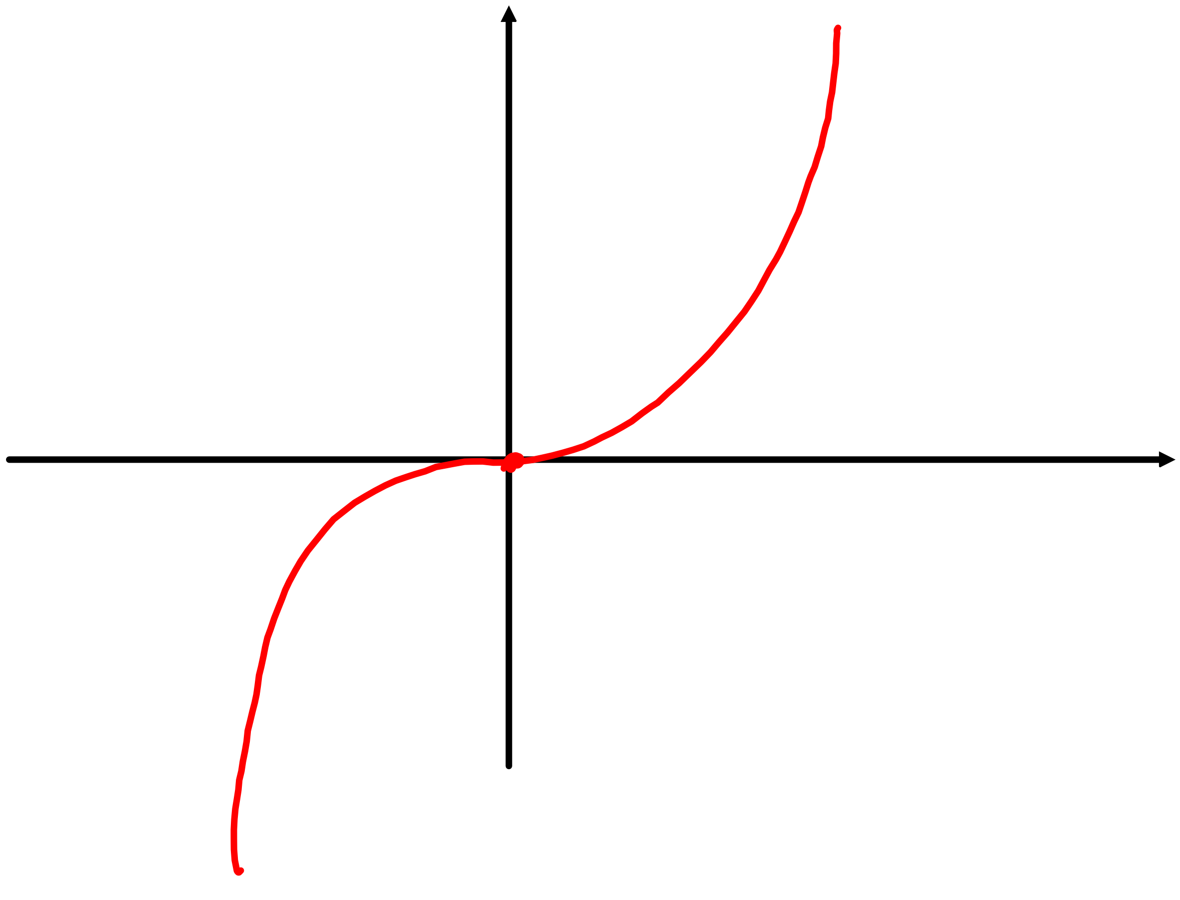
$x_0 = 0$ è punto di minimo ma $\nexists f'(0)$.

Oss: Il teorema di Fermat è una condizione necessaria ma non suff. per un max o un minimo locale.

Es: $f(x) = x^3$

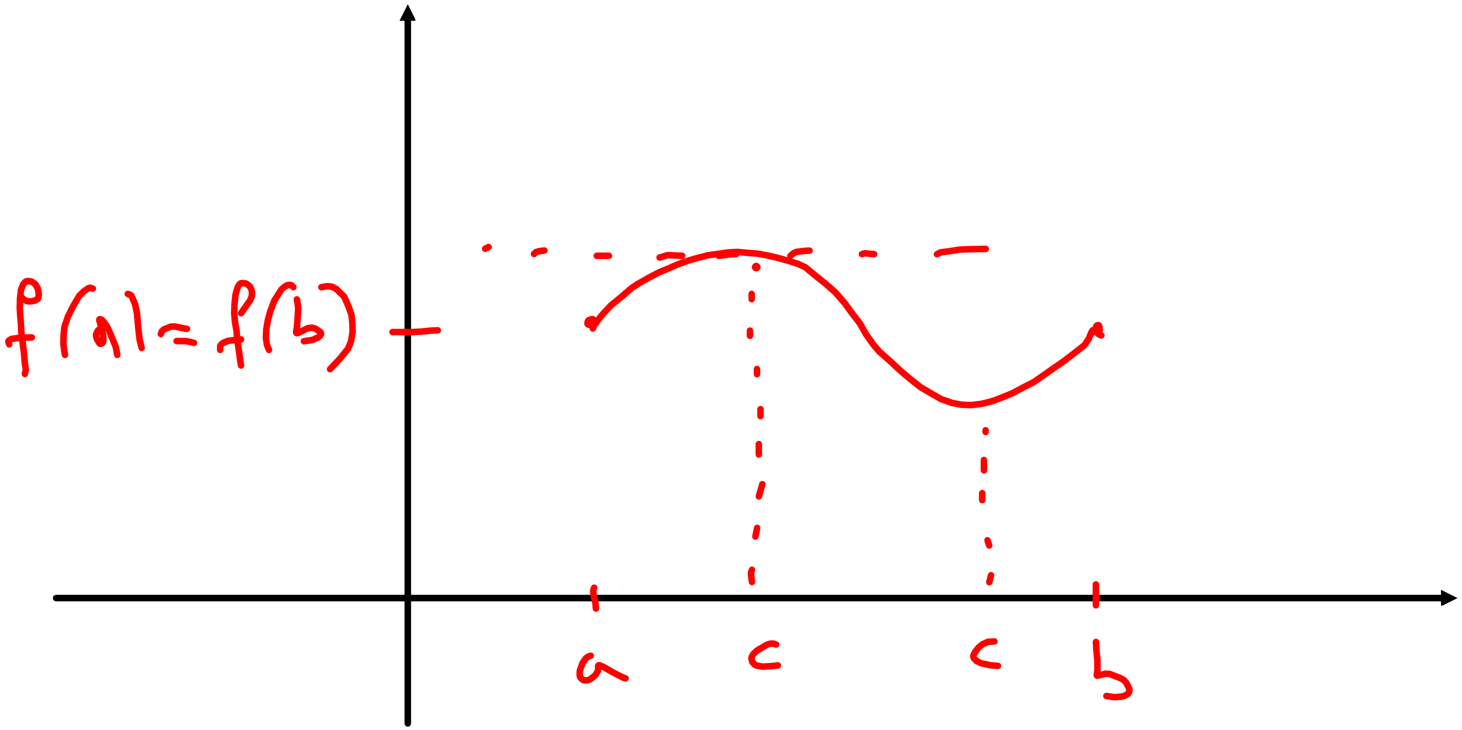
$f'(x) = 3x^2 \qquad f'(0) = 0$

ma $x_0 = 0$ non è né di max né di min. locale



Teorema di Rolle

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e se $f(a) = f(b)$ allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$.


f(a) = f(b)
a
c
c
b

dim: f è continua in $[a,b]$ quindi per il teorema di Weierstrass f ha max e min.

Siano x_1, x_2 t.c.

$$f(x_1) = \min f \quad , \quad f(x_2) = \max f .$$

caso 1) f è costante

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

Caso 2) f non è costante.

allora x_1 oppure x_2 sono punti interni ad (a,b).

$\Rightarrow$ per il teorema di Fermat

$$f'(x_1)=0 \text{ oppure } f'(x_2)=0.$$

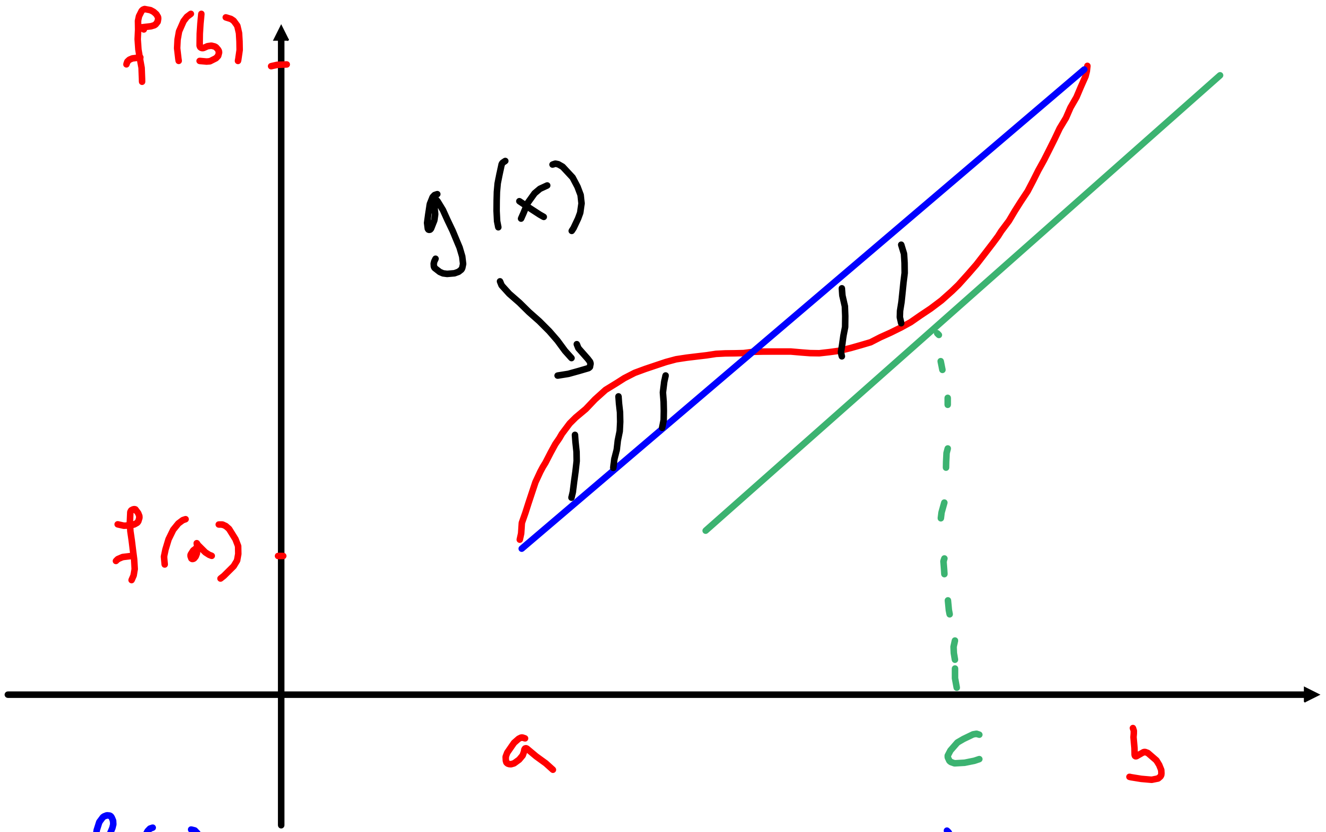
$\square$

Teorema di Lagrange

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Allora $\exists\ c\in(a,b)$ t.c.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare del segmento che unisce gli estremi del grafico.

<u>dim</u>: Definisco

$$r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

è la retta che passa per gli estremi del grafico.

Definisco $g(x) = r(x) - f(x)$

è la distanza col segno tra la retta e la funzione

ott 21-09:46

g è continua in $[a,b]$

e derivabile in (a,b).

$$g(a) = r(a) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = r(b) - f(b) = f(b) - f(b) = 0$$

$$\Rightarrow g(a) = g(b)$$

applico Rolle a g

quindi $\exists\ c \in (a,b)$ t.c.

$$g'(c) = 0 .$$

$$g'(c) = r'(c) - f'(c)$$

$$r'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$g'(c) = 0 \Rightarrow r'(c) = f'(c)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$\square$

Teorema.

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f : I \to \mathbb{R}$ continua in I

e derivabile in $\text{int}(I)$.

1) se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \text{Int}(I)$

allora f è costante in I

2) se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{Int}(I)$

allora f è deb. crescente in I

3) se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \text{Int}(I)$

$\Rightarrow f$ è deb. decresente in I

4) se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Int}(I)$

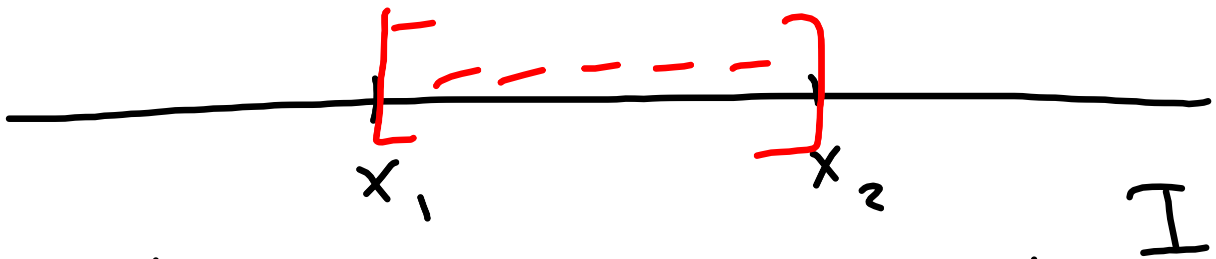
$\Rightarrow f$ è strett. crescente in I

5) se $f'(x) < 0 \quad \forall x \in \text{Int}(I)$

$\Rightarrow f$ è strett. decresc. in I.

dim: siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. I è un intervallo

$\Longrightarrow [x_1, x_2] \subset I$



applico Lagrange a f sull'intervallo $[x_1, x_2]$

allora $\exists\ c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad > 0$$

quindi $f(x_2) - f(x_1)$ ha lo stesso segno di $f'(c)$.

caso 1) se $f'(x) = 0 \ \forall x \in \operatorname{int}(I)$

$c \in \operatorname{int}(I) \Rightarrow f'(c) = 0$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1) \quad \Rightarrow f \text{ è costante}$$

4) $\quad f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in \text{int}(I)$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

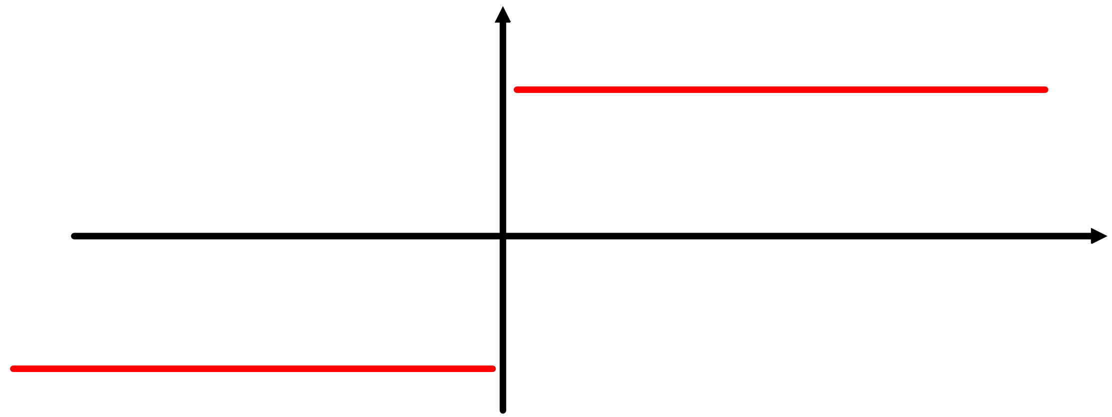
$\Rightarrow f$ è strett. crescente.

$\square$

Oss: f deve essere definita su un intervallo.

Es: $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f è derivabile in tutto il suo dominio e

$$f'(x) = 0 \quad \forall x$$

ma f non è costante.

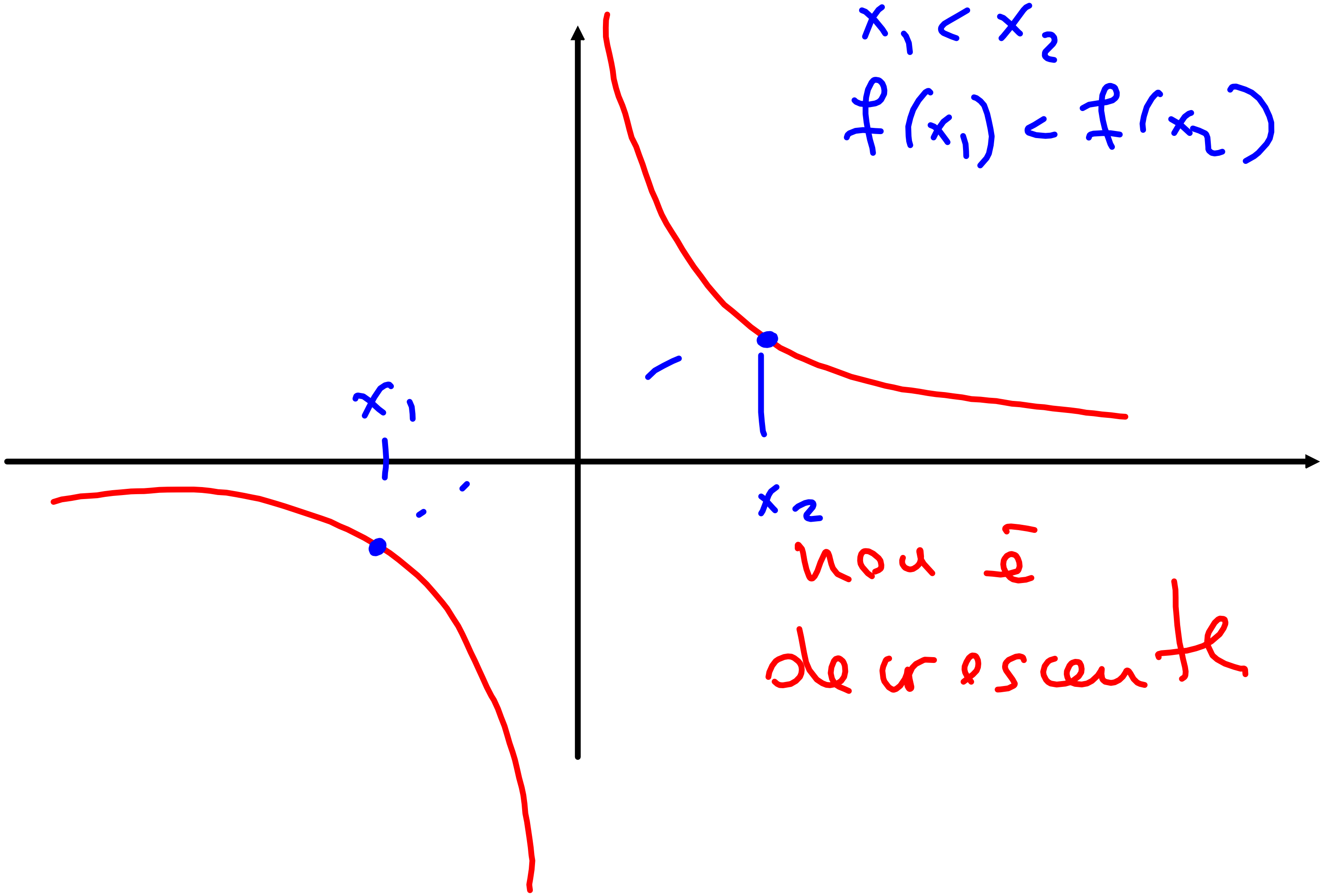
Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

f è derivabile in tutto il suo dominio

$$f'(x) = D(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$f'(x) < 0 \quad \forall x$



$x_1 < x_2$

$f(x_1) < f(x_2)$

non è decrescente

In questi esempi la f
non è definita su un
intervallo.

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$\Rightarrow$ f è costante in $(0, +\infty)$

quanto vale la costante?

La calcoliamo in un punto

$x = 1$

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{artg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \boxed{x > 0}$$

Se $x < 0 \longrightarrow f(x)$ ê costante

ma $f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{artg} \frac{1}{-1}$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$.

quindi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

se $x < 0$